

П.С.Варгин

Математическая модель улитки внутреннего уха.

Введение

Улитка внутреннего уха является составной частью слуховой системы человека. В ней осуществляется преобразование звукового сигнала в сигнал возбуждения волокон слухового нерва. Механизм этого преобразования в целом не имеет сколько-нибудь близких аналогов в технике созданной человеком, что осложняет понимание его работы. Можно разбить процесс преобразования на отдельные фазы, каждая из которых имела бы знакомые нам аналоги. Такое разбиение представляет собой моделирование работы улитки внутреннего уха. Модель должна содержать не только качественное, но и количественное описание моделируемого объекта, что позволило бы как планировать эксперименты по дальнейшему его изучению, так и оценивать их результаты, совершенствуя саму модель.

Моделированию работы улитки посвящено множество работ теоретического и экспериментального характера, например, [1-5]. К сожалению, теоретические работы либо недостаточно прозрачны в отношении их физического смысла, либо не доведены до простых формул, позволяющих проводить расчет модели, с использованием современных универсальных систем компьютерной математики (пакетов MathCAD, Matlab и др.). По этим причинам работа с такими моделями затруднена.

Предлагаемая модель в удобном виде описывает изменение скорости распространения и затухание звуковой волны в прямом (вестибулярном) канале улитки, а также движение основной (базиллярной) мембраны. В заключительной части статьи, с точки зрения теории обработки сигналов, высказывается предположение о трансверсальном характере фильтрации (обнаружения) звуковых сигналов слуховой системой человека.

Улитка

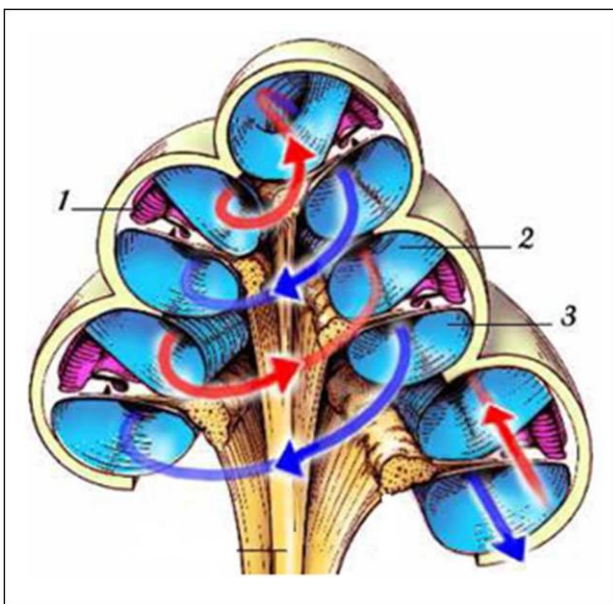


Рис.1. Срез улитки внутреннего уха: 1 – промежуточный канал с органом Корти и покровной мембраной, 2 – прямой канал, 3 – обратный канал. Стрелками показаны прямой и обратный путь звуковой волны

Улитка представляет собой свернутую в два с половиной витка спирали костяную трубку, срез которой показан на рис.1. Трубка разделена внутри двумя перегородками (основной и рейснеровой мембранами) на три канала, по которым распространяется звуковая волна. В промежуточном канале находится орган Корти, прикрепленный к основной мембране и касающийся еще одной – покровной мембраны (лучше сказать - мантии), закрепленной только с одного, ближнего к оси улитки, края. Движение этих мембран под действием звука преобразуется в слуховые сигналы нервных волокон с помощью волосковых клеток органа Корти, поперечный срез которого приведен на рис. 7.

Звуковой сигнал через систему косточек среднего уха поступает на гибкую мембрану овального окна прямого канала, изображенного на развертке улитки рис. 2.

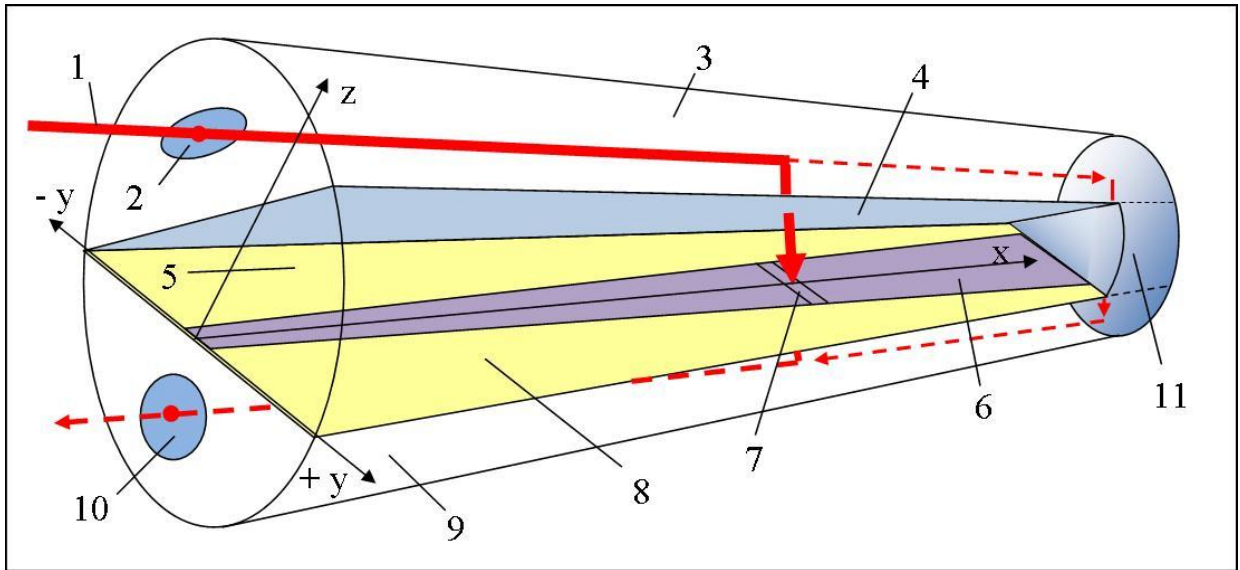


Рис.2. Развертка улитки (без органа Корти и покровной мембраны): 1 – звуковой сигнал, 2 – овальное окно, 3 – прямой канал, 4 – рейснерова мембрана, 5 – промежуточный канал, 6 – основная мембрана, 7 – одна из струн, 8 – костная оправа, 9 – обратный канал, 10 – круглое окно, 11 – геликотрема.

Прямой канал заканчивается в вершине улитки отверстием (геликотремой) соединенным с началом обратного канала, ведущего к мембране круглого окна, выходящего в среднее ухо. Оба канала заполнены жидкостью – перилимфой, а находящийся между ними изолированный промежуточный канал заполнен жидкостью другого состава – эндолимфой. Основная мембрана армирована множеством жестких поперечных коллагеновых волокон – струн, натянутых на костную оправу поперек направления каналов. Число струн достигает 24 тысяч. Они настроены на различные звуковые частоты, высокие до 20 килогерц у входа (выхода) прямого (обратного) канала и низкие до 20 герц у геликотремы.

Звуковая волна определенной частоты, поступившая в прямой канал, доходит до зоны основной мембраны резонирующей на эту частоту и поглощается здесь органом Корти. Волны частот меньше 20 герц проходят через геликотрему в обратный канал, заставляя колебаться мембрану круглого окна. Волны, не до конца поглощенные органом Корти, также доходят до круглого окна обратного канала через основную мембрану или геликотрему.

Тонкая и податливая мембрана Рейснера легко передает звук любой частоты из основного канала в промежуточный и поэтому может не учитываться при гидромеханических расчетах.

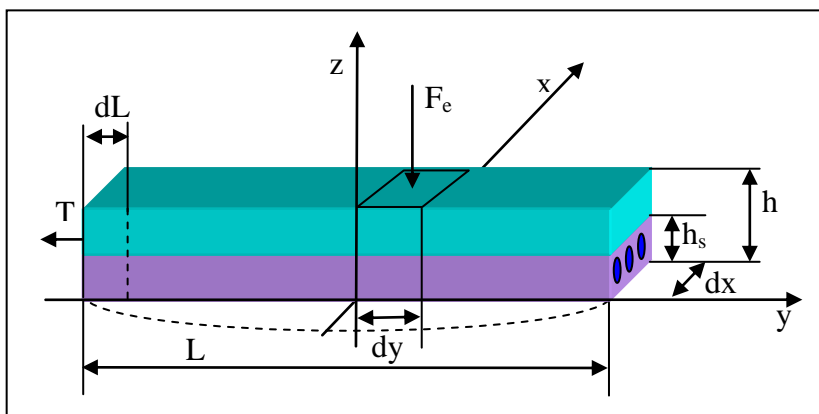


Рис.3. Элемент основной мембраны – условная струна.

Ширина основной мембраны изменяется, увеличиваясь по направлению к геликотреме. На рис.3 изображен небольшой по длине участок мембраны (условной струны), величиной dx . Толщина h и длина L участка являются функциями его удаленности от начала узкого конца мембраны. Упругая часть участка

основной мембраны толщиной h_s , состоящая из коллагеновых волокон и соединительной ткани на рисунке изображена нижним слоем, а верхний слой соответствует нагрузке, которую создает прикрепленный к мембране орган Корти. Под воздействием переменного давления основная мембрана и ее участок изгибаются, как показано на рисунке дугообразной пунктирной линией в одну, а затем в другую сторону.

Струна

Будем представлять основную мембрану улитки, как совокупность натянутых струн, подобно ряду струн фортепьяно или арфы. В отличие от музыкальных инструментов, здесь струны соединены общей перепонкой, которая весьма слабо связывает струны между собой, но добавляет сопротивления их колебаниям со стороны жидкостей промежуточного и обратного каналов улитки, в которых они колеблются. Эти струны имеют дополнительную нагрузку в виде органа Корти, что имеет свой аналог в музыкальных инструментах, где стальные струны обматываются медной проволокой для понижения частоты их звучания.

Одна из таких струн рис.3, может содержать несколько коллагеновых волокон, которые вместе натянуты со средней силой T , приложенной к сечению струны $h_s \times dx$, где: dx – ширина струны; h_s – толщина упругого слоя струны, зависящая от x .

Эту силу можно определить выражением:

$$T = \varepsilon E h_s dx,$$

где: E – модуль Юнга – коэффициент, характеризующий упругость материала струны,

$\varepsilon = \frac{dL}{L}$ – относительное удлинение струны под действием силы T .

Рассмотрим теперь силы, действующие на элемент струны.

На поверхность элемента действует сила давления:

$$F_e = P \sin(\Omega t) dx dy,$$

где: P – амплитуда давления звуковой волны; $\Omega = 2\pi f$ – круговая частота звука; f – частота звука; t – время; dx – ширина и dy – длина элемента струны.

Сила инерции элемента, согласно второму закону Ньютона, равна:

$$I_e = \rho h dx dy \frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

где: $\rho h dx dy$ – масса элемента; $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ – его ускорение; ρ – средняя плотность

(двухслойного) элемента струны; h – толщина струны.

При движении элемента он испытывает силу сопротивления жидкости окружающей среды, направленную противоположно его скорости:

$$R_e = \alpha \frac{\partial z}{\partial t} dx dy,$$

где: α – коэффициент вязкости среды; $\frac{\partial z}{\partial t}$ – скорость элемента.

Сила упругости струны, действующая на элемент и стремящаяся вернуть его в положение равновесия, зависит от искривления струны в месте расположения элемента и в линейном приближении равна:

$$U_e = T \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy = \varepsilon E h_s \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy$$

Баланс всех сил действующих на элемент струны (уравнение его движения) определяется соотношением:

$$R_e + I_e - U_e = F_e \quad (1)$$

Подставляя в (1) выражения для составляющих сил, получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний струны в вязкой среде [6]:

$$\alpha \frac{\partial z}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \varepsilon E h_s \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = P \sin(\Omega t) \quad (2)$$

Вводя обозначения:

$$\beta = \frac{\alpha}{\rho h}; \quad \eta^2 = \frac{\varepsilon E h_s}{\rho h}; \quad \chi = \frac{P}{\rho h},$$

запишем его в виде:

$$\beta \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \eta^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \chi \sin(\Omega t) \quad (3)$$

Найдем решение этого уравнения - $z(y,t)$ для установившихся стационарных колебаний, при которых вид решения не зависит от начальных условий (формы струны при $t=0$). Этот случай соответствует периодическому звуковому сигналу и является весьма характерным, хотя следует учитывать, что, например, при анализе речи, сигнал можно считать стационарным в течение всего 10 миллисекунд.

Граничные условия для концов струны определим равенством: $z(y,t) = 0$, при $y = \pm \frac{L}{2}$, что соответствует их жесткому закреплению.

Кроме периодичности (во времени) звукового сигнала сделаем предположение о периодичности колебаний струны по пространственной координате y , считая струну бесконечной по длине. Такой чисто математический прием позволяет найти решение в классе периодических функций, а затем ограничиться реальным интервалом колебания (длиной) струны. Периодическую функцию можно в общем случае представить рядом Фурье. Учитывая приведенное выше граничное условие, получим следующее представление вида искомого решения:

$$z(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\Omega t - \phi_n) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right), \quad (4)$$

где коэффициенты разложения Фурье: $c_n(t) = a_n \sin(\Omega t - \phi_n)$, поскольку движение струны

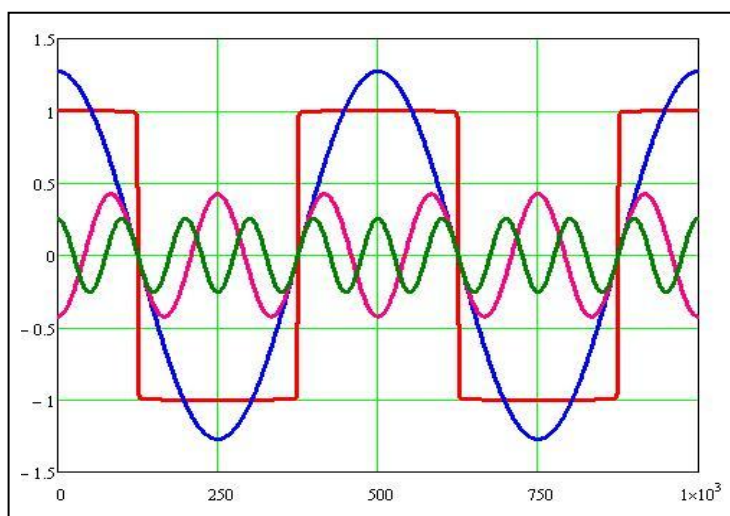


Рис.4. Разложение функции меандра на гармонические составляющие.

совершается с частотой вынуждающей силы. Амплитуду a_n и нулевую фазу ϕ_n каждой пространственной гармоники с номером n необходимо определить в процессе решения уравнения (3). Нулевая фаза колебаний гармоники определяется при сравнении с фазой звуковых колебаний в районе струны.

По всей длине реальной (ограниченной) струны на все ее элементы действует в любой момент времени одинаковое давление звуковой волны, но для поддержания колебаний на условно бесконечной струне

давление должно меняться вдоль нее на противофазное на каждом смежном по координате y участке длиной L . Последнее означает, что следует умножить коэффициент χ в уравнении (3) на функцию меандра $M(y)$ с периодом $2L$, изображенную на рис. 4.

Ее можно разложить в ряд Фурье [7]:

$$M(y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)(-1)^{\frac{n+3}{2}}}{n} \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad (5)$$

Это выражение показывает, что четные пространственные гармоники разложения равны нулю, а из нечетных гармоник каждая вторая берется со знаком минус. На рис. 4 приведены первая, третья и пятая гармоники разложения, причем третья гармоника инвертирована. Можно видеть, что для всех гармоник выполняются граничные условия, то есть их значения равны нулю, при $y = \pm \frac{L}{2}$.

Отсутствие четных пространственных гармоник в выражении для вынуждающей колебания струны силы давления, означает то, что, при случайном возникновении четной гармоники в колебаниях струны она быстро исчезнет благодаря некомпенсируемым силам трения. Следует отметить, что имеются опытные данные, указывающие на наличие особых поперечных противофазных колебаний основной мембраны улитки, вызванные движением внешних волосковых клеток органа Корти. Это обстоятельство следует учитывать при задании длины струны L .

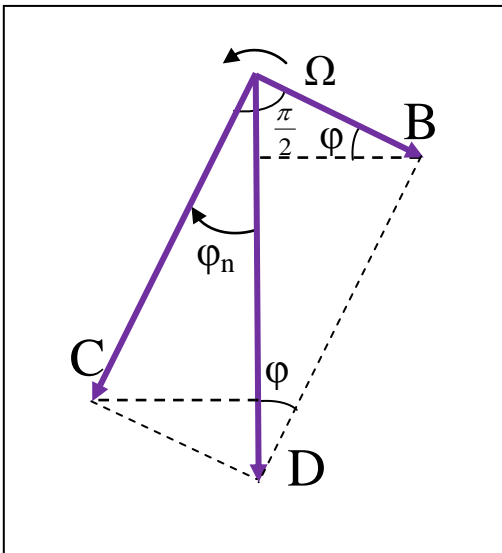
Запишем выражения для производных, входящих в (3), дифференцируя (4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \Omega a_n \cos(\Omega t - \phi_n) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\sum_{n=1}^{\infty} \Omega^2 a_n \sin(\Omega t - \phi_n) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} a_n \sin(\Omega t - \phi_n) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (3) с учетом (5), сокращая на величину $\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$ и

обозначая: $\omega = \frac{\pi \eta}{L}$, получим для каждого из n выражение:

$$\beta \Omega a_n \cos(\Omega t - \phi_n) + (n^2 \omega^2 - \Omega^2) a_n \sin(\Omega t - \phi_n) = \frac{2(1 - (-1)^n)(-1)^{\frac{n+3}{2}}}{n\pi} \chi \sin(\Omega t). \quad (6)$$



Составляющие этого выражения можно представить векторами (рис. 5), вращающимися против часовой стрелки с частотой Ω , с длинами:

$$\begin{aligned} B &= \beta \Omega a_n, \\ C &= (n^2 \omega^2 - \Omega^2) a_n, \\ D &= \frac{2(1 - (-1)^n)(-1)^{\frac{n+3}{2}}}{n\pi} \chi. \end{aligned}$$

Очевидны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} D^2 &= B^2 + C^2, \\ \sin \phi_n &= \frac{B}{D}, \quad \cos \phi_n = \frac{C}{D}, \quad \tan \phi_n = \frac{B}{C}. \end{aligned}$$

Из первого соотношения получим, при подстановке значений входящих в него величин,

Рис.5. Соотношение векторов.

уравнение, решая которое найдем:

$$a_n = \frac{2(1-(-1)^n)(-1)^{\frac{n+3}{2}} \chi}{n\pi \sqrt{(n^2 \omega^2 - \Omega^2)^2 + \beta^2 \Omega^2}}. \quad (7)$$

Из остальных соотношений, с учетом значения a_n , получим выражения для тригонометрических функций фазы ϕ_n :

$$\sin \phi_n = \frac{\beta \Omega}{\sqrt{(n^2 \omega^2 - \Omega^2)^2 + \beta^2 \Omega^2}}, \quad (8)$$

$$\cos \phi_n = \frac{n^2 \omega^2 - \Omega^2}{\sqrt{(n^2 \omega^2 - \Omega^2)^2 + \beta^2 \Omega^2}}, \quad (9)$$

$$\tan \phi_n = \frac{\beta \Omega}{n^2 \omega^2 - \Omega^2}. \quad (10)$$

Учитывая, что:

$$z(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\Omega t - \phi_n) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\sin \Omega t \cos \phi_n - \cos \Omega t \sin \phi_n) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right),$$

$$\sin(\Omega t - \phi_n) = \sin \Omega t \cos \phi_n - \cos \Omega t \sin \phi_n,$$

подставляя в (4) значения величин из (7), (8) и (9), получим решение уравнения (3):

$$z(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)(-1)^{\frac{n+3}{2}} \chi [(n^2 \omega^2 - \Omega^2) \sin \Omega t - \beta \Omega \cos \Omega t]}{n\pi [(n^2 \omega^2 - \Omega^2)^2 + \beta^2 \Omega^2]} \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right), \quad (11)$$

$$\text{в котором величины: } \chi = \frac{P}{\rho h}, \quad \beta = \frac{\alpha}{\rho h}, \quad \omega = \frac{\pi \eta}{L}, \quad \eta^2 = \frac{\varepsilon E h_s}{\rho h}$$

являются в общем случае функциями координаты x и могут быть определены экспериментально.

Скорость звука

В разных средах звук распространяется с различными скоростями. В воздухе его скорость 340 м/сек, в воде 1400 м/сек, а в артерии человека скорость пульсовой волны 10 м/сек.

Известно [8], что скорость звука в неограниченной среде:

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 k_0}}, \quad \text{где: } \rho_0 - \text{плотность среды, } k_0 = \frac{\Delta \rho_0}{\rho_0 \Delta p} - \text{сжимаемость среды, } \Delta \rho_0 -$$

изменение плотности среды при изменении звукового давления Δp .

Если звук распространяется в узкой трубке, то растяжимость ее стенок, под действием звукового давления эквивалентна увеличению сжимаемости среды заполняющей трубку. Этим объясняется низкая скорость звука в артерии или резиновом

огородном шланге. Растяжимость оценивается величиной $K = \frac{\Delta S}{S \Delta p}$ где: S – площадь

сечения трубки, ΔS - изменение площади сечения под действием звукового давления Δp .

Прямой канал улитки внутреннего уха (рис. 1) расположен в кости черепа, которая обладает низкой растяжимостью, но стенки основного и особенно промежуточного канала, в который легко передается изменение звукового давления через рейснерову мембрану, выстланы более податливой клетчаткой, что способствует увеличению суммарной площади сечения каналов под действием давления звука.

Однако наибольший вклад в увеличение площади сечения каналов вносит, подвижность основной мембраны улитки. Представляя эту мембрану совокупностью струн, мы можем считать, что этот вклад обусловлен изгибом струны, соответствующей данному сечению.

Можно ввести эффективную сжимаемость жидкости каналов:

$$k = k_0 + K_w + K,$$

где: K_w – растяжимость, обусловленная деформацией стенок каналов, K – растяжимость, обусловленная деформацией основной мембраны улитки. Учитывая два первых слагаемых последнего выражения, получим:

$$c_0 = \sqrt{\frac{1}{\rho_0(k_0 + K_w)}} - \text{начальную скорость звука в улитке у овального окна (без учета}$$

действия основной мембраны).

В предыдущем разделе статьи отмечалось, что колебания струны содержат нечетные пространственные гармоники. При этом на длину струны L приходится n полувольт данной гармоники. Все кроме одной полуволны компенсируют изгиб друг друга. Нескомпенсированная полуволна вносит вклад в увеличение площади сечения звукопровода.

Если изменение давления $\Delta p = P$, то есть равно амплитуде звукового давления, то площадь, ограниченная одной полувольтной гармоникой с номером n в момент максимального звукового давления:

$$\Delta S_n = a_n \cos \phi_n \int_{-\frac{L}{2n}}^{\frac{L}{2n}} \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy = \frac{2La_n \cos \phi_n}{n\pi}$$

Используя это равенство, а также (7) и (9), получим выражение для растяжимости, обусловленной деформацией основной мембраны улитки:

$$K = \frac{\sum_{n=1,3}^{\infty} \Delta S_n}{SP} = \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{8L(n^2\omega^2 - \Omega^2)}{n^2\pi^2 Sph((n^2\omega^2 - \Omega^2)^2 + \beta^2\Omega^2)}$$

Скорость звука в основном (промежуточном) канале улитки:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 k}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \rho_0 c_0^2 K}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \rho_0 c_0^2 K U_-(K)}}. \quad (12)$$

В последнем выражении введена ступенчатая функция $U_-(K) = \begin{cases} 0, K < 0 \\ 1, K \geq 0 \end{cases}$,

ограничивающая значение скорости звука величиной c_0 , для исключения слишком больших и даже мнимых значений скорости. Согласно выражению (12), скорость звука постепенно уменьшается от начальной c_0 до минимальной скорости, а затем растет благодаря ускоряющему действию колеблющихся струн основной мембраны. Этот рост идет до значений, которые могут значительно превышать c_0 . Реально, скорость волны ограничена нелинейным характером ускоряющего действия, что не учитывается нашей линейной моделью. Отметим, что ускорение волны звука происходит в области улитки, где волна претерпела уже большое затухание и имеет пренебрежимо малую амплитуду.

Затухание звука

Распространяясь в какой либо среде, звук испытывает затухание, то есть амплитуда звуковой волны уменьшается. Затухание может быть обусловлено несколькими причинами: расхождением волны, рассеянием звука на препятствиях или его поглощением. В прямом канале улитки первые две причины несущественны, а поглощение происходит в результате перехода энергии звуковой волны в тепловую энергию при движении основной мембраны под действием силы звукового давления, из-за вязкости окружающей среды и трения органа Корти о покровную мембрану.

При действии силы давления $F_e = P \sin(\Omega t) dx dy$ на элемент струны (рис. 3) гармоническая составляющая колебаний струны с номером n , амплитудой a_n и фазой ϕ_n вносит свой вклад в смещение этого элемента за время dt . Этот вклад можно найти дифференцированием компоненты с номером n выражения (4) по времени:

$$dz_n(y, t) = a_n \Omega \cos(\Omega t - \phi_n) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dt \quad (13)$$

Смещение элемента струны сопровождается возникновением силы трения. Часть силы давления на элемент F_e , пропорциональная множителю $\sin(\phi_n)$ в соответствии с рис. 5, противодействует этой силе трения. Поскольку противодействующая сила отличается по своей фазе от фазы смещения элемента, ее работа по смещению элемента уменьшается, причем также пропорционально множителю $\sin(\phi_n)$. Таким образом работа силы давления при смещении элемента на величину $dz_n(y, t)$ равна:

$$dA_n(y, t) = F_e \sin^2(\phi_n) dz_n(y, t) = Pa_n \Omega \sin^2(\phi_n) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dx dy \sin(\Omega t) \cos(\Omega t - \phi_n) dt \quad (14)$$

На длину струны L приходится нечетное число n полувольт гармоник. Четное число разнополярных полувольт при интегрировании по длине струны дает нулевое значение соответствующей части интеграла. Интегрируя выражение (14) по времени одного периода колебания струны $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega}$ и по длине одной полуволны гармоник $\frac{L}{n}$, можно определить работу силы давления по преодолению сил трения при действии пространственной гармоник струны с номером n :

$$A_n = Pa_n \Omega \sin^2(\phi_n) dx \int_{-\frac{L}{2n}}^{\frac{L}{2n}} \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy \int_0^{T_0} \sin(\Omega t) \cos(\Omega t - \phi_n) dt = \frac{2}{n} L P a_n \sin^3(\phi_n) dx \quad (15)$$

При действии всех гармоник работа против сил трения при вынужденных колебаниях струны в течении одного периода колебаний равна:

$$A = \sum_{n=1,3}^{\infty} A_n = 2PL dx \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin^3(\phi_n) \quad (16)$$

Мощность потерь энергии звуковой волны на участке основной мембраны длиной dx и шириной L равна произведению этой величины на частоту $f = \frac{\Omega}{2\pi}$ волны взятому со знаком минус:

$$d\Phi = -PL\Omega \frac{dx}{\pi} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin^3(\phi_n) \quad (17)$$

Плотность потока мощности звуковой волны в жидкости [8]:

$$M = \frac{P^2}{\rho_0 c},$$

где: P - звуковое давление, ρ_0 - плотность жидкости, c – скорость звука.

Поток мощности в сечении основного и промежуточного каналов улитки:

$$\Phi = \frac{P^2 S}{\rho_0 c}, \quad (18)$$

где: S - площадь сечения.

Относительное уменьшение потока мощности на участке dx , с учетом значений величин, входящих в (17):

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = -\frac{4\rho_0 c L \beta^3 \Omega^4 dx}{\pi^2 S \rho h} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n+3}{2}}}{n^2 [(n^2 \omega^2 - \Omega^2)^2 + \beta^2 \Omega^2]^2}. \quad (19)$$

Последнее выражение представляет собой дифференциальное уравнение с разделенными переменными Φ и x . Интегрируя обе его части получим равенство:

$$\int \frac{d\Phi}{\Phi} = \ln|\Phi| = -\frac{4\rho_0 \beta^3 \Omega^4}{\pi^2 S \rho h} \int \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n+3}{2}} c L dx}{n^2 [(n^2 \omega^2 - \Omega^2)^2 + \beta^2 \Omega^2]^2} + const.$$

Определяя постоянную в его правой части из условия: $\Phi = \Phi_0 = \frac{P_0^2 S}{\rho_0 c_0}$,

где: P_0 - звуковое давление возле овального окна улитки, при $x = 0$, получим:

$$\Phi = \Phi(x) = \Phi_0 \exp \left[-\frac{4\rho_0 \beta^3 \Omega^4}{\pi^2 S \rho h} \int_0^x \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n+3}{2}} c L dx}{n^2 [(n^2 \omega^2 - \Omega^2)^2 + \beta^2 \Omega^2]^2} \right]. \quad (20)$$

Подставляя в (20) значения Φ и Φ_0 , получим зависимость амплитуды звукового давления в прямом (промежуточном) канале улитки как функцию расстояния от овального окна:

$$P = P(x) = P_0 \sqrt{\frac{c}{c_0}} \exp \left[-\frac{2\rho_0 \beta^3 \Omega^4}{\pi^2 S \rho h} \int_0^x \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n+3}{2}} c L dx}{n^2 [(n^2 \omega^2 - \Omega^2)^2 + \beta^2 \Omega^2]^2} \right]. \quad (21)$$

Модель

Теперь мы имеем все необходимые зависимости, для того чтобы составить математическую модель улитки внутреннего уха. Входные и выходные данные модели сведены в таблицу.

№	Обозначение	Единица измерения	Наименование величины
1	α	кг/м ² сек	коэффициент вязкости
2	ρ_0	кг/м ³	средняя плотность мембраны*
3	ρ	кг/м ³	плотность звукопроводящей жидкости
4	c_0	м/сек	начальная скорость звука
5	f_0	сек ⁻¹	максимальная частота резонанса мембраны*
6	f_1	сек ⁻¹	минимальная частота резонанса мембраны*
7	n	-	номер пространственной гармоники
8	x_1	м	максимальное расстояние от начала мембраны*, **
9	x	м	расстояние от начала мембраны*, **
10	y	м	расстояние от середины струны мембраны*
11	z	м	смещение элемента мембраны*

12	L_0	м	минимальная ширина мембраны*
13	L_1	м	максимальная ширина мембраны*
14	P_0	Н/м ²	начальное звуковое давление
15	S	м ²	средняя площадь сечения звукопровода
16	F	сек ⁻¹	частота звука
17	$\beta(x)$	сек ⁻¹	коэффициент затухания
18	$\tau(x)$	сек	задержка распространения звуковой волны
19	$\omega(x)$	рад сек ⁻¹	круговая резонансная частота струны мембраны*
20	$c(x)$	м/сек	скорость звука
21	$h(x)$	м	толщина мембраны*
22	$L(x)$	м	ширина мембраны*
23	$P(x)$	Н/м ²	звуковое давление
24	$f(x)$	Н	резонансная частота струны мембраны*
25	$K(x)$	м ² /Н	растяжимость стенок звукопровода
26	$U_-(x)$	-	функция единичного скачка
27	$z(x, y, t)$	м	форма мембраны*
*основной (базиллярной) мембраны, **от овального окна			

Некоторые входные данные являются функциями расстояния от начала основной мембраны улитки x . Другие взяты в своем среднем значении. В принципе, усредненные входные данные могут быть заменены на соответствующие зависимости от x или y , что лишь несколько увеличит компьютерное время расчета параметров модели.

Составляющие модель зависимости могут использоваться как выходные данные модели, интересные для графического воспроизведения, так и в качестве входных данных, используемых для последующих этапов моделирования.

Можно использовать следующие выражения для величин, являющихся функциями расстояния от начала основной мембраны:

$$f = f(x) = f_0 \left(\frac{f_1}{f_0} \right)^{\frac{x}{x_1}}, \quad \omega = \omega(x) = 2\pi f(x), \quad h = h(x) = h_0 \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^{\frac{x}{x_1}},$$

$$\beta = \beta(x) = \frac{\alpha}{\rho h(x)}, \quad L = L(x) = L_0 + (L_1 - L_0) \frac{x}{x_1}, \quad U_-[K(x)] = \begin{cases} 0, & K(x) < 0 \\ 1, & K(x) \geq 0 \end{cases}.$$

С учетом этого, математическая модель улитки внутреннего уха описывается пятью соотношениями:

$$K(x) = \frac{8\rho_0 c_0^2}{\pi^2 S \rho} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{L(x)[n^2 \omega(x)^2 - \Omega^2]}{n^2 h(x)((n^2 \omega(x)^2 - \Omega^2)^2 + \beta(x)^2 \Omega^2)}, \quad \{1\}$$

$$c(x) = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \rho_0 c_0^2 K(x) U_-[K(x)]}}, \quad \{2\}$$

$$P(x) = P_0 \sqrt{\frac{c(x)}{c_0}} \exp \left[- \frac{2\rho_0 \beta^3 \Omega^4}{\pi^2 S \rho} \int_0^x \frac{c(x)L(x)}{h(x)} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n+3}{2}} dx}{[n^2 ((n^2 \omega(x)^2 - \Omega^2)^2 + \beta(x)^2 \Omega^2)]^2} \right], \quad \{3\}$$

$$\varphi(t, x) = \Omega \left(t - \int_0^x \frac{dx}{c(x)} \right), \quad \{4\}$$

$$z(t, x, y) = \frac{4P(x)}{\pi\rho h(x)} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n+3}{2}} [(n^2\omega(x)^2 - \Omega^2) \sin \varphi(t, x) - \beta(x)\Omega \cos \varphi(t, x)]}{n[(n^2\omega(x)^2 - \Omega^2)^2 + \beta(x)^2\Omega^2]} \cos\left(\frac{n\pi y}{L(x)}\right). \quad \{5\}$$

Первое соотношение определяет растяжимость стенок звукового канала, обусловленную деформацией основной мембраны улитки.

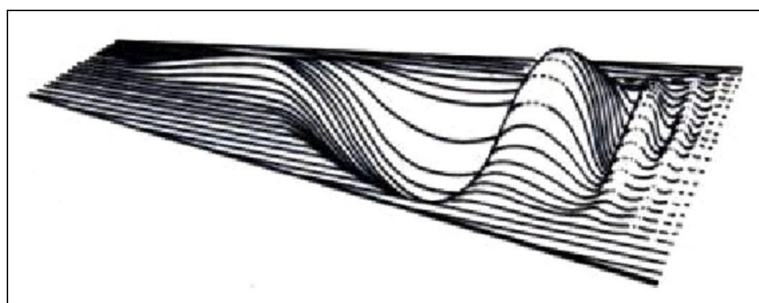
Второе соотношение определяет значение скорости распространения звуковой волны в жидкости над основной мембраной. Скорость постепенно уменьшается от начальной c_0 до минимальной, а затем растет, достигая значения c_0 .

Третье соотношение определяет уменьшение амплитуды давления звуковой волны из-за потери ее энергии при сопротивлении жидкости окружающей среды движению основной мембраны, а также из-за трения взаимодействия органа Корти и покровной мембраны улитки.

Четвертое соотношение определяет фазу колебаний основной мембраны с учетом задержки, которую испытывает звуковая волна, при распространении в прямом (промежуточном) канале улитки.

Пятое соотношение позволяет представить форму колеблющейся основной мембраны, при распространении звуковой волны в прямом (промежуточном) канале улитки, воспроизводя так называемую «бегущую волну Г. Бекеша», изображенную на рис. 6 [1].

В приложении к настоящей статье приведен пример расчета предложенной модели в



системе MathCAD. В данном примере последний (трехмерный) график был построен при использовании средств анимации (функции FRAME), с получением файла видеозаписи. На этом же графике построены две пространственные прямые, показывающие боковые границы основной мембраны.

Рис.6. Бегущая волна Г. Бекеша.

Пути развития модели

Предложенная линейная математическая модель улитки не затрагивает механизма работы органа Корти, сечение которого соответствующее одной условной струне

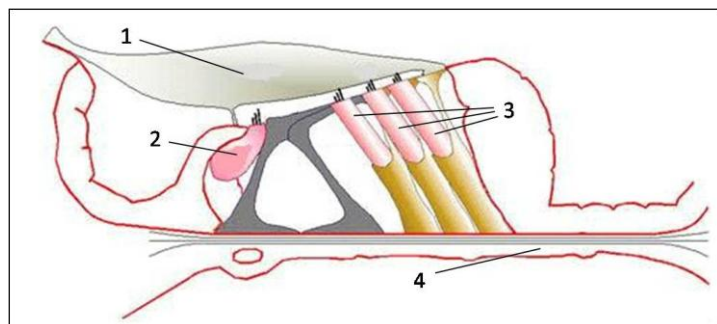


Рис.7. Орган Корти: 1 – покровная мембрана, 2 – внутренняя волосковая клетка, 3 – внешние волосковые клетки, 4 – основная мембрана

основной мембраны показано на рис. 7 [9]. В ней его действие учитывается лишь выбором коэффициента

$$\beta(x) = \frac{\alpha}{\rho h(x)}$$

путем произвольного задания величины α . Физиологические исследования показывают, что эта величина задается центральной частью слуховой системы путем воздействия на внешние волосковые клетки органа Корти, которые под воздействием эфферентных импульсов центральной нервной системы изменяют свою длину в такт с колебаниями основной мембраны. Сила механического

действия этих клеток при слабом звуке компенсирует потери трения, возникающие при колебаниях основной и покровной мембран. В этом случае орган Корти работает как система с положительной обратной связью, причем прямую (афферентную) связь с центральной нервной системой обеспечивают как наружные, так и внутренние волосковые клетки. Если положительная обратная связь повышает коэффициент усиления слуховой системы, то отрицательная обратная связь при сильном звуковом сигнале может ее снижать, для чего достаточно изменить фазу колебаний наружных волосковых клеток. Учет работы механизма работы органа Корти позволит разработать приведенную в предыдущем разделе модель в части выбора коэффициента α для различных участков основной мембраны.

Ранее упоминалось о том, что улитка содержит около 24 тысяч коллагеновых упругих волокон, армирующих основную мембрану. Число внутренних волосковых клеток, расположенных в один ряд, достигает 3,5 тысяч, а число наружных, расположенных в три ряда, 12 тысяч. Эти клетки равномерно распределены вдоль всей основной мембраны. Такое большое количество волосковых клеток, позволяет предположить возможность существования у слуховой системы механизма трансверсальной фильтрации звуковых колебаний.

Трансверсальный [10] фильтр рис.8 содержит линию задержки, состоящую из множества элементов τ_i с отводами и суммирующее устройство, осуществляющее так

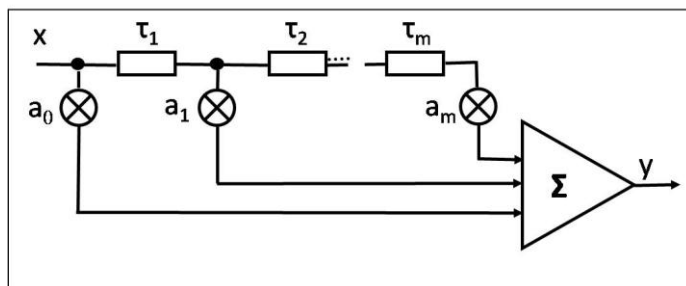


Рис.8. Трансверсальный фильтр.

называемое взвешенное суммирование с заданными весами a_i .

Звуковая волна любой частоты воспринимаемого звукового диапазона, распространяясь в прямом (промежуточном) канале улитки, сначала плавно тормозится из-за действия колеблющейся основной мембраны, а затем резко ускоряется в районе резонанса. При торможении волна испытывает

значительную задержку распространения, которая определяется по формуле $\tau_{1,2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{c(x)}$,

где: x_1 и x_2 координаты участка задержки основной мембраны. Аналогичная зависимость используется в правой части соотношения {4} нашей модели. Зная расстояние между соседними внутренними волосковыми клетками, мы можем определить элементарную задержку τ_i трансверсального фильтра улитки на данном участке основной мембраны.

Суммирование сигналов различных волосковых клеток может осуществляться на одном нейроне. Веса суммирования могут определяться запомненными в процессе обучения коэффициентами передачи синапсов дендритов этого нейрона.

Трансверсальные фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ) позволяют легко осуществлять так называемую оптимальную фильтрацию входных сигналов. При этом с наибольшей эффективностью подавляются любые помехи за минимальное время приема сигнала. В случае улитки внутреннего уха осуществляется хорошая развертка примерно полутора периодов входного синусоидального сигнала рис. 6. За это время, в принципе, мозг может сделать заключение о наличии сигнала на входе слуховой системы. В отличие от резонансного фильтра, относящегося к классу фильтров с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ), трансверсальный оптимальный фильтр согласуется с формой входного сигнала и не требует большого времени накопления одинаковых фрагментов входного сигнала. Заметим, что, например, при анализе речи время, в течение которого могут появляться такие фрагменты, оценивается величиной не более 10 миллисекунд.

Таким образом, слуховая система, по-видимому, может использовать различные виды фильтрации: КИХ, БИХ, с независимой адаптивной регулируемой обратной связью, что облегчает гибкое решение сложных задач распознавания слуховых образов.

Дополнение предложенной модели улитки возможными механизмами фильтрации позволит расширить сферу ее применения и приблизиться к созданию математической модели слуховой системы человека. Создание такой модели, может стимулировать изобретение и развитие новых технических средств воздействия на слуховой анализатор.

Литература:

1. G. von Békésy, Experiments in Hearing. New York e.a., Mc.Grow-Hill Book Company, 1960, 745 p.
2. В. М. Бабич, С. М. Новоселова, «О колебаниях базилярной мембраны во внутреннем ухе млекопитающих», Математические вопросы теории распространения волн. 10, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 89, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1979, 54–62.
3. J. Prikkel, “Modelling cochlear mechanics” Master thesis in applied mathematics, 2009, 75 p.
4. L. Watts, “Cochlear Mechanics: Analysis and Analog VLSI”. PhD thesis, California Institute of Technology, 1993.
5. В.П.Варин, А.Г.Петров, «Математическая модель слуховой улитки человека» Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 96. 26 с.
6. А. Н. Крылов, «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах», Изд. 5-е. –М.-Л.: ГТТИ, 1950, 368 с.
7. И. С. Гоноровский, «Радио-технические цепи и сигналы» 4-е изд., М., Радио и связь, 1986, 512 с.
8. М.А.Исакович, «Общая акустика», М., Наука, 1973, 496 с.
9. <http://147.162.36.50/cochlea/index.htm>
10. Л. Рабинер, Б. Гоулд, «Теория и применение цифровой обработки сигналов», М., Мир, 1978, 835 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ к статье П.С.Варгина «Математическая модель улитки внутреннего уха», 2012 г.
Расчет модели в системе MathCad.

$x_1 := 0$ $x_2 := 30 \cdot 10^{-3}$ - начало и конец участка основной мембраны (м)

$L_1 := 0.06 \cdot 10^{-3}$ $L_2 := 0.2 \cdot 10^{-3}$ $L(x) := L_1 + (L_2 - L_1) \cdot \frac{x}{x_2}$ - ширина основной мембраны
 в начале, конце и посреди
 участка (м)

$h_1 := 0.04 \cdot 10^{-3}$ $h_2 := 0.004 \cdot 10^{-3}$ $h(x) := h_1 \cdot \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{\frac{x}{x_2}}$ - толщина основной мембраны
 в начале, конце и посреди
 участка (м)

$f_1 := 20 \cdot 10^3$ $f_2 := 200$ $f(x) := f_1 \cdot \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^{\frac{x}{x_2}}$ - резонансная частота основной мембраны
 в начале, конце и посреди участка (м⁻¹)

$\rho := 2080$ - плотность основной мембраны (кг м⁻²) $\alpha := 400$ - коэффициент вязкости среды, окружающей основную мембрану (кг м⁻²сек⁻¹)

$\beta(x) := \frac{\alpha}{\rho \cdot h(x)}$ - коэффициент затухания (м⁻¹)

$F := 1 \cdot 10^3$ - частота звука (м⁻¹) $P_0 := 1$ - начальная амплитуда давления звука (Н м⁻²)

$\Omega := 2\pi \cdot F$ $\omega(x) := 2\pi \cdot f(x)$ - круговые частоты $n := 1, 3..3$ - номер гармоники

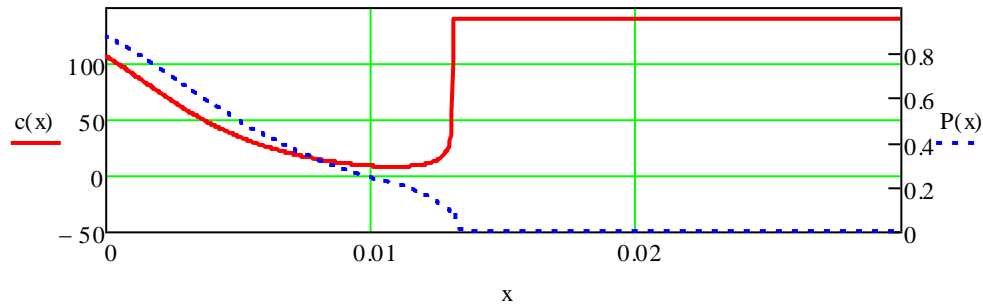
$c_0 := 340$ - начальная скорость звука (м сек⁻¹) $\rho_0 := 1000$ - плотность среды распространения звука (кгм⁻²)

$S := 1 \cdot 10^{-6}$ - средняя площадь сечения звукопровода (м²)

$K(x) := \frac{8 \cdot c_0^2 \cdot L(x) \cdot \rho_0}{\pi^2 \cdot S \cdot \rho \cdot h(x)} \sum_n \frac{(n \cdot \omega(x))^2 - \Omega^2}{n^2 \left[\left[(n \cdot \omega(x))^2 - \Omega^2 \right]^2 + \beta(x)^2 \Omega^2 \right]}$ - растяжимость стенок звукопровода из-за деформации основной мембраны (м² Н⁻¹)

$c(x) := \frac{c_0}{\sqrt{1 + K(x) \cdot \Phi(K(x))}}$ - скорость звука (м сек⁻¹), $\Phi(x)$ - функция единичного скачка (heaviside step)

$P(x) := P_0 \sqrt{\frac{c(x)}{c_0}} \exp \left[- \left(\frac{\rho_0 \beta(x)^3 \cdot \Omega^4}{\pi^2 \cdot S \cdot \rho \cdot h(x)} \right) \int_0^x \sum_n \frac{2 \cdot (-1)^{\frac{n+3}{2}} c(x) \cdot L(x)}{n^2 \left[\left[(n \cdot \omega(x))^2 - \Omega^2 \right]^2 + \beta(x)^2 \Omega^2 \right]^2} dx \right]$ - амплитуда звукового давления (Нм⁻²)



$$\varphi(t, x) := \Omega \cdot \left(t - \int_0^x \frac{1}{c(x)} dx \right) \quad \text{- фаза колебаний основной мембраны (рад)}$$

$$t := \frac{\text{FRAME}}{80F} \quad \text{- функция задания времени при анимации (сек)}$$

$$\underline{t} := \frac{0.3}{F} \quad \text{- без анимации}$$

$$z(x, y) := \frac{4P(x) \cdot 10^6}{\pi \cdot \rho \cdot h(x)} \cdot \sum_n \left[\frac{(-1)^{\frac{n+3}{2}}}{n} \cdot \cos\left(\frac{n\pi \cdot y}{L(x)}\right) \cdot \frac{(n^2 \cdot \omega(x)^2 - \Omega^2) \cdot \sin(\varphi(t, x)) - \beta(x) \cdot \Omega \cdot \cos(\varphi(t, x))}{(n^2 \cdot \omega(x)^2 - \Omega^2)^2 + \beta(x)^2 \cdot \Omega^2} \right]$$

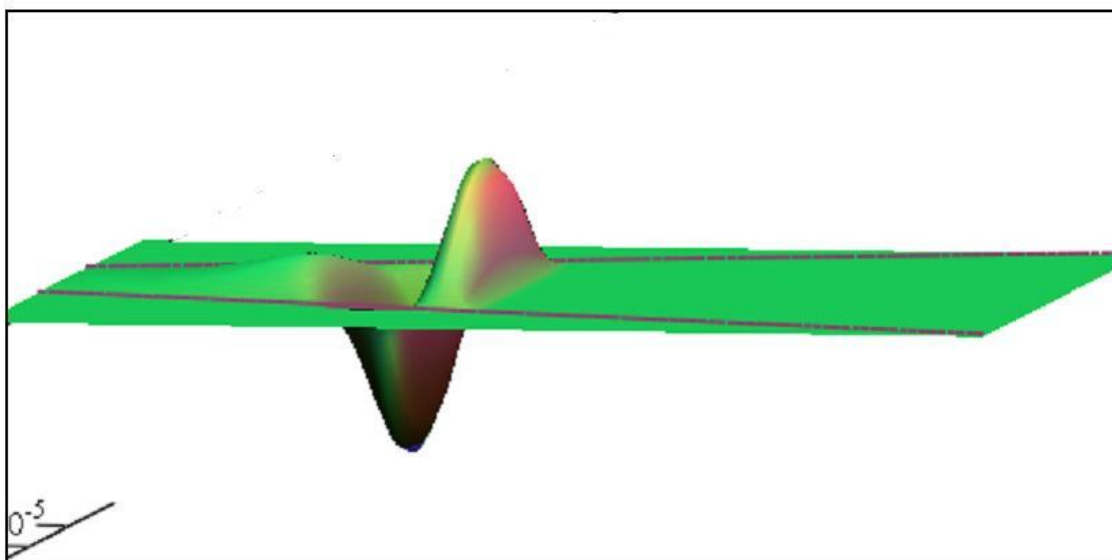
- отклонение колеблющейся основной мембраны от положения равновесия (мкм)

$$Z(x, y) := \text{if}\left(|y| < \frac{L(x)}{2}, z(x, y), 0\right) \quad t0 := 0 \quad t1 := 3 \quad tg := 100 \quad \text{- вспомогательные функции ограничения на графике зоны, соответствующей основной мембране}$$

$$\underline{H}(t) := \begin{pmatrix} 0.01t \\ 0.000023t + 0.00003 \\ 0.001 \end{pmatrix} \quad \underline{G}(t) := \begin{pmatrix} 0.01t \\ -0.000023t - 0.00003 \\ 0.001 \end{pmatrix}$$

$$\underline{C} := \text{CreateSpace}(H, t0, t1, tg)$$

$$\underline{D} := \text{CreateSpace}(G, t0, t1, tg)$$



Z, D, C